Диплом В.Е. Корепина

Сокращение ультрафиолетовых расходимостей в однопетлевом приближении квантовой гравитации

1974

С О Д Е Р Ж А Н И Е

§ I. ВВЕДЕНИЕ

В теории элементарных частиц интерес к квантовой гравитации связан главным образом с надеждой на то, что именно гравитационное поле может сыграть роль естественного "физического регуляризатора", устраняющего бесконечности из квантовой теории поля.

Первая корректная схема квантования гравитационного поля была построена Дираком [6] в 1958 году в рамках гамильтонова метода. Другие методы, по существу, эквивалентные развитому Дираком, были разработаны группой Арновитт-Дезер-Мизнер [7], Швингером [8], Бергманом [9], Андерсоном [10] и Фаддеевым [11]. Отсутствие явной ковариантности в гамильтоном подходе делает теорию возмущений чрезвычайно громоздкой.

Первой попыткой построения ковариантной схемы квантования теории тяготения явилась работа Гупты [12]. Однако, его метод привел к нарушению унитарности теории. Впервые это было замечено Фейнманом [13].

Фейнман же показал, что унитарность диаграммы, имеющей вид замкнутого кольца, можно восстановить, если вычесть из нее другую диаграмму, тоже имеющую вид кольца и описывающую распространение фиктивной частицы. Метод Фейнмана не давал возможности прямого обобщения на более сложные диаграммы.

Решение проблемы для любых диаграмм было дано в 1967 году Фаддеевым и Поповым [15] и Де-Виттом [14], использовавшими существенно различные подходы. Схема квантования содержит линии фиктивных частиц и вершины их взаимодействия с гравитонами, фиктивные частицы входят в диаграммы в виде колец, соотношение спин-статистика для них оказывается нарушенным.

Далее встает вопрос о последовательном проведении программы перенормировок. Это существенно затруднено тем, что формально теория является неперенормируемой. Естественно сначала заняться чистой гравитацией и попытаться, не обращая внимания на неперенормируемость, посчитать первое (однопетлевое) приближение для простейшей амплитуды (четыреххвостки). Цель этой работы: исследовать первую поправку к упругому рассеянию двух гравитонов. В однопетлевом приближении получены следующие результаты на поверхности масс:

I) отсутствие бесконечностей,

2) формула для конечной части производящего функционала S матрицы,

3) равенство нулю вклада двухточечной петли.

§ 2. КОВАРИАНТНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Квантование производится методом континуального интегрирования.

Рассматривается производящий функционал S матрицы, зависящий от асимптотических полей, а не производящий функционал для функций Грина, который зависит от токов. S матрица рассматривается сразу на поверхности масс, используются классические уравнения движения. Матричный элемент S матрицы для n - хвостки получается n - кратным дифференцированием рассматриваемого функционала по асимптотическим полям. Удобство использования именно производящего функционала S матрицы состоит в том, что он ковариантно зависит от классических полей, а также в том, что на поверхности масс некоторые бесконечности исчезают. Он дает только диаграммы с петлями I .

Итак, пусть $g^{cl}_{\mu\nu}$ - решение уравнений Эйнштейна.

Тогда $R=0$ и $R_{\mu\nu}=0$

Пусть $iW(g^{cl}_{\mu\nu})$ - производящий функционал для связных диаграмм Фейнмана с петлями.

Тогда

$$e^{iW}=e^{-iS_{Gr}(g^{cl}_{\rho\omega})}\int \exp iS_{Gr}(g^{cl}_{\rho\omega}+U_{\rho\omega})\,\det^{-\frac{5}{2}}(-g^{cl}_{\gamma\delta}-U_{\gamma\delta})\,d\overset{10}{U}_{\alpha\beta} \qquad (2.I)$$

где

$$S_{Gr}(g_{\alpha\beta})=\int\sqrt{g}\,R(g_{\alpha\beta})\,d\overset{4}{x}$$

- действие для гравитационного поля.

Мера $g^{-\frac{5}{2}}\,d\overset{10}{g}_{\mu\nu}$ обеспечивает унитарность теории. Вследствие того, что S_{Gr} инвариантно относительно неабелевой группы координатных преобразований, формула (2.I) носит формальный характер.

Для свободного действия не существует однозначной функции Грина. Теория оуазывается вариантом теории калибровочных полей. Корректное квантование производится методом Фаддеева-Попова 25 Однако, дополнительное условие удобно выбрать так, что ковариантная зависимость $W(\overset{\alpha}{g}_{\mu\nu})$ была явной. Введем обозначения:

$$\overset{t}{g}_{\mu\nu} \equiv \overset{\alpha}{g}_{\mu\nu} + U_{\mu\nu} \; , \quad \overset{t}{g}{}^{\alpha\beta} \overset{t}{g}_{\beta\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu}$$

$\overset{\alpha}{\nabla}_{\alpha}$ - ковариантная производная с метрикой $\overset{\alpha}{g}_{\mu\nu}$

$\overset{t}{\nabla}_{\alpha}$ - ковариантная производная с матрикой $\overset{t}{g}_{\mu\nu}$

Введем дополнительное условие:

$$\overset{\alpha}{\nabla}{}^{\mu} U_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\alpha}{g}{}^{\alpha\beta} \overset{\alpha}{\nabla}_{\nu} U_{\alpha\beta} - C_{\nu} = 0$$

где C_{ν} - произвольная функция координат, причем,

Обозначим: $\mathcal{D}_{\nu} \equiv \overset{\alpha}{\nabla}{}^{\mu} U_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\alpha}{g}{}^{\alpha\beta} \overset{\alpha}{\nabla}_{\nu} U_{\alpha\beta}$

Результатом корректного квантования является следующая формула для $iW(\overset{\alpha}{g}_{\mu\nu})$

$$e^{iW} = \int \exp i S_{Gr}(\overset{t}{g}_{\mu\nu}) \cdot \det \hat{M} \left(\prod_{x} \delta^{4}(\mathcal{D}_{\nu} - C_{\nu}) \overset{t}{g}{}^{-\frac{5}{2}} \right) \cdot d^{10} U_{\mu\nu} \qquad (2.2)$$

так как

$$S_{Gr}(\overset{\alpha}{g}_{\alpha\beta}) = 0$$

Оператор $\hat{M}$ имеет следующий вид:

$$\hat{M}_{\nu\omega} = \overset{\alpha}{\nabla}{}^{\mu} \overset{t}{\nabla}_{\mu} \overset{t}{g}_{\nu\omega} + \overset{\alpha}{\nabla}{}^{\mu} \overset{t}{\nabla}_{\nu} \overset{t}{g}_{\mu\omega} - \overset{\alpha}{g}{}^{\alpha\beta} \overset{\alpha}{\nabla}_{\nu} \overset{t}{\nabla}_{\alpha} \overset{t}{g}_{\beta\omega}$$

Оператор $\hat{M}$ получается следующим образом:

при изменении $\delta \overset{\alpha}{g}_{\mu\nu} = 0, \; \delta \overset{t}{g}_{\mu\nu} = - \overset{t}{\nabla}_{\mu} \overset{t}{g}_{\nu\omega} \delta x^{\omega} - \overset{t}{\nabla}_{\nu} \overset{t}{g}_{\mu\omega} \delta x^{\omega}$

$(\mathcal{D}_{\nu} - C_{\nu})$ меняется следующим образом

$$\delta(\mathcal{D}_{\nu} - C_{\nu}) = \hat{M}_{\nu\omega} \delta x^{\omega}$$

Правая часть (2.2) ковариантно зависит от $\overset{\alpha}{g}_{\mu\nu}$

Действительно, сделаем замену:

$$\overset{\alpha}{g}{}'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \overset{\alpha}{g}_{\mu\nu} \qquad C'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} C_{\beta}$$

одновременно сделаем замену переменных интегрирования:

$$u'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} u_{\mu\nu}$$

$g^{t}_{\mu\nu}$ изменится точно так же. Что произойдет при этом с подинтегральным выражением (2.2)?

Ясно, что останется прежним $S_{Gr}(g^{t}_{\mu\nu})$, мера интегрирования,

$$\prod_x \sqrt{g}\, \delta^4(\mathcal{D}_\nu - C_\nu)$$

но $\det M \cdot \prod_x g^{-\frac{1}{2}}$ заменится на $\left[\prod_x \left(\det \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}\right) \cdot g^{-\frac{1}{2}}\right] \det M$

Итак, при координатных преобразованиях выражение (2.2) преобразуется как скалярная плотность. Несмотря на то, что в интеграл (2.2) введена дельта функция, и, таким образом, наложено дополнительное условие на переменные интегрирования, дополнительное условие для $g^{cl}_{\mu\nu}$ остается совершенно произвольным. Далее делаем преобразования следуя Хоофту 3

Их цель - преобразовать подинтегральное выражение к экспоненциальному виду, избавившись от дельта-функции.

Выражение

$$N = \left(\prod_x \sqrt{g_{cl}}\right) \cdot \int dC_\nu \cdot \exp - i \int d^4x \sqrt{g^{cl}}\, g^{\alpha\beta}_{cl}\, C_\alpha C_\beta$$

не зависит от $g^{cl}_{\mu\nu}$ Так как постоянные общие множители в (2.2) приводят лишь к изменению W на $const$., которая исчезает при дифференцировании, то можно умножить (2.2) на N . Получится, что

$$e^{iW} = \prod_x \sqrt{g_{cl}} \int dC_\nu \exp - i \int d^4x \sqrt{g^{cl}}\, g^{\alpha\beta}_{cl} C_\alpha C_\beta \cdot \int e^{iS_{Gr}(g^{t}_{\mu\nu})} \cdot \det M \cdot \prod_x \delta^4(\mathcal{D}_\nu - C_\nu)\, g^{-\frac{5}{2}}\, d^{10}u_{\mu\nu}$$

Проинтегрируем по C_ν и получим, что

$$e^{iW} = \prod_x \sqrt{g_{cl}} \int \exp i \left\{ S_{Gr}(g^{t}_{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{g^{cl}}\, g^{\alpha\beta}_{cl} \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta \right\} \cdot \det M \cdot g_t^{-\frac{5}{2}} \cdot d^{10} u_{\gamma\delta}$$

Если расписать $\det M$ как интеграл по антикоммутирующим векторным полям $\bar{\chi}^{\alpha}$ и χ^{β}, то получим:

$$\det M = \int d^4\bar{\chi}^{\alpha}\, d^4\chi^{\beta} \exp i \int d^4x\, \bar{\chi}^{\alpha} M_{\alpha\beta} \chi^{\beta}$$

Окончательное выражение для производящего функционала S матрицы имеет вид

$$e^{iW(g^{cl}_{\mu\nu})}=\left(\prod_x \sqrt{g^{cl}}\right)\int \exp i\left\{S_{gr}(g^t_{\mu\nu})-\int d^4x\sqrt{g^{cl}}\,g^{\lambda\beta}_{cl}\mathcal{D}_\lambda\mathcal{D}_\beta\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp i\int d^4x\,\bar{\chi}^\lambda M_{\lambda\beta}\chi^\beta\cdot g^{t-\frac{5}{2}}\cdot d^{10}\mathcal{U}_{\mu\nu}\,d^4\bar{\chi}^\lambda d^4\chi^\beta$$

Об общих множителях мы не заботимся. Считаем интеграл методом стационарной фазы.

Стационарной является точка:

$$g_{\mu\nu}=g^{cl}_{\mu\nu}\,,\quad \bar{\chi}^\lambda=0\,,\quad \chi_\beta=0$$

так как фиктивные частицы ненаблюдаемы.

В показателе степени оставляем лишь члены квадратичные по переменным интегрирования. В этом приближении получаем, что

$$\bar{\chi}^\lambda M_{\lambda\beta}\chi^\beta=\bar{\chi}^\lambda g^{cl}_{\lambda\beta}\overset{cl}{\nabla}{}^\mu\overset{cl}{\nabla}_\mu\chi^\beta$$

Интеграл

$$e^{iW}=\prod_x g^{-1}_{cl}\int \exp i\left\{\mathcal{U}_{\mu\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta g^{cl}_{\mu\nu}\delta g^{cl}_{\lambda\beta}}\mathcal{U}_{\lambda\beta}-\int d^4x\sqrt{g^{cl}}\,g^{\lambda\beta}_{cl}\mathcal{D}_\lambda\mathcal{D}_\beta\right\}\exp i\int d^4x\,\bar{\chi}\,\nabla^\mu\nabla_\mu\chi_\lambda\cdot d^{10}\mathcal{U}_{\mu\nu}\,d^4\bar{\chi}^\lambda d^4\chi_\beta \qquad (2.3)$$

берется. Необходимо знать квадратичную форму тензорных переменных.

$$\mathcal{U}_{\mu\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta g^{cl}_{\mu\nu}\delta g^{cl}_{\lambda\beta}}\mathcal{U}_{\lambda\beta}-\int d^4x\sqrt{g^{cl}}\,g^{\lambda\beta}_{cl}\mathcal{D}_\lambda\mathcal{D}_\beta=\int d^4x\,\mathcal{U}_{\mu\nu}\hat{F}_{gr}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda\beta}\,g^{\lambda\lambda}_{cl}g^{\beta\delta}_{cl}\mathcal{U}_{\beta\delta}\cdot\frac{1}{2}$$

Далее вплоть до § 5 будут встречаться только $g^{cl}_{\lambda\beta}$, поэтому индекс cl опускаем и вспомним о нем лишь в § 5.

Для $\hat{F}_{gr}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda\beta}$ получаем:

$$\hat{F}_{gr}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda\beta}=\frac{2}{4}\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\lambda+\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho-g^{\mu\nu}g_{\rho\lambda}\right)\left(\nabla^\theta\nabla_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\lambda_\beta-2R^\rho{}_\lambda{}^\lambda{}_\beta\right)$$

Удобно обозначить

$$\hat{F}_f=\nabla^\mu\nabla_{\mu(\nu)}$$

Если мы возьмем гаусоовы интегралы в формуле (2.3), то получим, что

$$\exp i W(g^{l}_{\mu\nu}) = \Big(\prod_{x} g_{cl}^{-1}\Big) \cdot \det{}^{-\frac{1}{2}} \overset{1}{F}_{6r} \cdot \det \overset{1}{F}_{f} \qquad (2.4)$$

Итак, получено выражение для производящего функционала матрицы в однопетлевом приближении.

§ 3. УСТРАНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для подсчета детерминантов в формуле (2.4) воспользуемся методом собственного времени, который сводится к формуле:

$$\ln \det \hat{F} = -\mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left(e^{i(\hat{F}+i0)s} - e^{i\hat{I}s}\right) \qquad (3.1)$$

Для $e^{i\hat{F}s}$ можно выписать уравнение и начальное условие:

$$\frac{\partial e^{i\hat{F}s}}{\partial s} = i\hat{F}\cdot e^{i\hat{F}s} \qquad e^{i\hat{F}s}\Big|_{s=0} = I$$

$e^{i\hat{F}s}$ - Оператор интегральный, пусть $G(x;y;s)$ его ядро.

Поскольку главная часть оператора $\hat{F}$ - ковариантный даламбертиан, то выделим характерный для параболического уравнения сингулярный множитель:

$$G(x;x';s) = \frac{-1}{(4\pi s)^2} e^{\frac{i\sigma(xx')}{2s}} \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{A}(x;x';s) \qquad (3.2)$$

Причем, $\mathcal{A}(xx's)\Big|_{s=0} = 1$

$\mathcal{A}(xx's)$ - более гладкая функция,

$\sigma(xx')$ - геодезический интеграл между точками x и x' который удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma(xx')\partial_\nu\sigma(xx') = \sigma(xx') \qquad (3.3)$$

(В плоском пространстве $\sigma(xx') = \frac{1}{2}(x-x')^2$

Примечание: Слагаемое $-\mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{i\hat{I}s}$ исчезает при дифференцировании, так что не будем писать его в дальнейшем.

Третий сомножитель в формуле (3.2) биплотность $D(xx') = \det - \sigma_{;\mu\nu'}(xx')$ которая удовлетворяет уравнению:

$$D^{-1}(\sigma^{;\mu} D)_{;\mu} = 4 \qquad (3.4)$$

Удобно ввести так же бискаляр $\Delta(xx') = \dfrac{D}{\sqrt{g}\sqrt{g'}}$

Здесь введено обозначение $\partial_\nu \varphi(xx') = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}$ $\quad \partial_{\nu'} \varphi(xx') = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'^{\nu}}$

В дальнейшем нам пригодится тот факт, что $\lim\limits_{x \to x'} D = g(x)$ Это следует из формулы $\lim\limits_{x \to x'} \partial_\mu \partial_{\nu'} \sigma(xx') = -g_{\mu\nu}(x)$

(Она получена тем же способом, что и таблица пределов на странице I2).

Чтобы вычислить $\exp(i\hat{F}s)$ для фиктивных частиц и гравитонов, удобно ввести еще функцию параллельного переноса $g^\alpha{}_{\beta'}(xx')$ Это – бивектор. Значок α относится к точке x, а β' к точке x'. Функция удовлетворяет уравнению:

$$\sigma^{;\tau} g^\alpha{}_{\beta';\tau} = 0$$

и граничному условию $\quad g^\alpha{}_{\beta'}(xx') \underset{x \to x'}{=} \delta^\alpha_\beta$

(В плоском пространстве $g^\alpha{}_{\beta'}(xx') = \delta^\alpha_{\beta'}$ ($g^\alpha{}_{\beta'}$ обладает следующими свойствами:

$$g_{\mu\nu'} = g_{\nu'\mu} \qquad\qquad g_\mu{}^{\nu'} \sigma_{;\nu'} = -\sigma_{;\mu}$$

$$g_{\mu\sigma'} g_\nu{}^{\sigma'} = g_{\mu\nu} \qquad\qquad \det(-g_{\mu\nu'}) = \sqrt{g}\sqrt{g'}$$

Теперь все готово для того, чтобы вернуться к формуле (3.2).

Для фиктивных частиц положим:

$$A(xys)^\alpha{}_{\beta'} = g^\alpha{}_{\beta'}(xy) \cdot f^f(xys) \qquad (3.5)$$

$f^f(xys)$ – бискаляр, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial f^f}{\partial s} + \frac{\sigma^{;\mu} f^f_{;\mu}}{s} = \frac{i}{4} g^\alpha{}_{\beta'} \Delta^{-\frac{1}{2}} \nabla^\mu \nabla_\mu (\Delta^{\frac{1}{2}} g_\alpha{}^{\beta'} f^f) \qquad (3.6)$$

Разложим $f^{f}(xys)$ в ряд по S

$$f^{f}(xyS)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{f}(xy)(iS)^n \quad , \quad a_0=1 \tag{3.7}$$

Коэффициенты удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma^{\mu} a_{n.\mu}+n a_n=\frac{1}{4}\Delta^{-\frac{1}{2}} g^{\lambda}_{\beta'}\left(g_{\lambda}{}^{\beta'}\Delta^{\frac{1}{2}}a_{n-1}\right)_{.\theta}{}^{\theta} \tag{3.8}$$

Проделаем аналогичные выкладки для гравитонов.

Для них

$$A(xyS)^{\mu\nu}_{\lambda'\beta'}=\frac{1}{2}\left(g^{\mu}_{\lambda'}g^{\nu}_{\gamma'}+g^{\mu}_{\gamma'}g^{\nu}_{\lambda'}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\gamma'\lambda'}\right) f^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}(xyS) \tag{3.9}$$

$f^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}(xyS)$ – скаляр в точке x и тензор четвертого ранга в точке y. По $(\gamma'\lambda')$ $f^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}$, очевидно, следует считать симметричной и бесследовой.

$f^{\mu'\gamma'}_{\lambda'\beta'}(xyS)$ – удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial f^{\mu'\nu'}_{\lambda'\beta'}}{\partial S}+\frac{\sigma^{\omega}(f_{.\omega})^{\mu'\nu'}_{\lambda'\beta'}}{S}=i g_{\omega}{}^{\mu'} g_{\delta}{}^{\nu'}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left[\Delta^{\frac{1}{2}} g^{\omega}_{\lambda'} g^{\delta}_{\nu'} f^{\lambda'\nu'}_{\lambda'\beta'}\right]_{.\theta}{}^{\theta}- \tag{3.10}$$

$$-2i g_{\theta}{}^{\mu'} g_{\delta}{}^{\nu'} R^{\theta}{}_{\omega}{}^{\delta}{}_{\delta}\, S\, g^{\omega}_{\lambda'} g^{\delta}_{\gamma'} f^{\lambda'\gamma'}_{\lambda'\beta'}$$

Разложим $f^{\mu'\nu'}_{\lambda'\beta'}(xyS)$ в ряд по S :

$$f^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n}{}^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}\cdot(iS)^n \tag{3.11}$$

Коэффициенты $a_{n}{}^{\gamma'\lambda'}_{\lambda'\beta'}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma^{\omega}(a_{n.\omega})^{\mu'\nu'}_{\lambda'\beta'}+n a_{n}{}^{\mu'\nu'}_{\lambda'\beta'}=g_{\omega}{}^{\mu'} g_{\delta}{}^{\nu'}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left[\Delta^{\frac{1}{2}} g^{\omega}_{\lambda'} g^{\delta}_{\nu'} a_{n-1}{}^{\lambda'\gamma'}_{\lambda'\beta'}\right]_{.\theta}{}^{\theta}- \tag{3.12}$$

$$-2 g_{\theta}{}^{\mu'} g_{\delta}{}^{\nu'} R^{\theta}{}_{\omega}{}^{\delta}{}_{\delta}\, g^{\omega}_{\lambda'} g^{\delta}_{\gamma'} a_{n-1}{}^{\lambda'\gamma'}_{\lambda'\beta'}$$

причем $a_n{}^{\lambda'\beta'}_{\gamma'\delta'}$ – симметричны и бесследовы по верхней паре индексов,

$$a_0{}^{\lambda'\gamma'}_{\lambda'\beta'}=\frac{1}{2}\left(\delta^{\lambda'}_{\lambda'}\delta^{\gamma'}_{\beta'}+\delta^{\lambda'}_{\beta'}\delta^{\gamma'}_{\lambda'}-\frac{1}{2}g^{\lambda'\gamma'}g_{\lambda'\beta'}\right) \qquad (3.11a)$$

Эти выкладки являются непосредственным обобщением метода Де-Витта, который использовал его на примере взаимодействия скалярных частиц с внешней гравитацией 24.

Итак, мы некоторым способом описали решения уравнения (3.2) для фиктивных частиц и гравитонов. Воспользуемся этим для выделения бесконечностей в формуле (3.1). Ультрафиолетовые бесконечности возникают при интегрировании по собственному времени в окрестности нуля. Для их вычисления пригодятся разложения (3.7) и (3.11).

Если воспользоваться формулами (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) (3.7), то получим

$$\ln\det \hat F^{1/1}=4\int d^4x\sqrt{g}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dS}{S(4\pi S)^2}e^{\frac{i\delta}{2S}}(iS)^n a_n(xx) \qquad (3.13)$$

Если положить $\exp\frac{i\delta}{2S}\Big|_0=1$ в выражение (3.13), то в нуле расходятся множители перед коэффициентами a_0, a_1, a_2 соответственно, как четвертая степень, как квадрат и как логарифм, а остальные сходятся в нуле. Итак, в формуле (3.13) рассмотрим первые три слагаемые:

бесконечная часть $\ln\det \hat F^{1/1}=4\int d^4x\sqrt{g}\int_0^{\infty}\frac{dS}{S(4\pi S)^2}e^{\frac{i\delta}{2S}}\left(1+iSa_1-S^2a_2\right)=$ (3.14)

$$=\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\left(\frac{-1}{(\delta+i0)^2}-\frac{2a_1}{\delta+i0}+\left[\ln\frac{\delta+i0}{2}-\int_0^{\infty}\frac{dS}{S}e^{\frac{i}{S}}\right]a_2\right)\Big|_{x=y}$$

Коэффициент перед a_2 расходится как в нуле, так и на бесконечности, аналогично и для гравитонов. Из формул (3.1), (3.2), (3.4), (3.9), (3.11) следует, что

бесконечная часть $\ln\det \hat F^{1}_{Gr}=\frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(\frac{-4}{(\delta+i0)^2}\hat I-\frac{2\hat a_1}{\delta+i0}+\right.$ (3.15)

$$\left.+\left[\ln\frac{\delta+i0}{2}-\int_0^{\infty}\frac{dS}{S}e^{\frac{i}{S}}\right]\hat a_2\right)\Big|_{x=y}$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить коэффициенты перед ультрафиолетовыми бесконечностями, надо найти коэффициенты $a_1^f, a_1^{br}, a_2^f, a_2^{br}$ из уравнений (3.8), (3.I2).

По формуле (2.4) мы вычислим ультрафиолетовые оесконечности производящего функционала.

Из (3.8) следует, что

$$\lim_{x\to y} a_n^f = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to y}\Delta^{-\frac{1}{2}} g^{\alpha}{}_{\beta'}\left(g_{\alpha}{}^{\beta'}\Delta^{\frac{1}{2}} a_{n-1}\right)_{\cdot\theta}{}^{\theta} \tag{3.I6}$$

так как $\lim\limits_{x\to y} \sigma^{\mu} = 0$

Аналогично из (3.I2) следует, что

$$\lim a_n{}^{\mu'\nu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{n}\lim_{x\to y}\left\{g_{\omega}{}^{\mu'} g_{\delta}{}^{\nu'}\left[\Delta^{\frac{1}{2}} g^{\omega}{}_{\lambda'} g^{\delta}{}_{\nu'} a_{n-1}{}^{\lambda'\gamma'}\right]_{\cdot\theta}{}^{\theta} - 2R^{\mu'}{}_{\lambda'}{}^{\nu'}{}_{\gamma'} a_{n-1}{}^{\lambda'\gamma'}{}_{\alpha'\beta'}\right\} \tag{3.I7}$$

Чтобы вычислять пределы стоящие в правых частях (3.I6), (3.I7) надо знать величины типа $\lim\limits_{x\to y} \sigma_{\cdot\mu\lambda\gamma\delta}$, которые находим рекурентно из уравнений $\frac{1}{2}\sigma^{\mu}\sigma_{\mu} = \sigma$ $\sigma^{\omega} g^{\alpha}{}_{\beta'\omega} = 0$ $4\Delta^{\frac{1}{2}} = 2\Delta^{\frac{1}{2}\mu}\sigma_{\mu} + \Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{\mu}{}^{\mu}$

Последнее уравнение следует из (3.4), ковариантно дифференцируя их и пользуясь правилом коммутации:

$$(\varphi^{\mu})_{\cdot\nu\delta} - (\varphi^{\mu})_{\delta\nu} = R_{\nu\delta}{}^{\mu}{}_{\tau}\varphi^{\tau}$$

Выпишем таблицу для пределов:

$$\lim\sigma = \lim\sigma^{\mu} = 0 \quad , \quad \lim\sigma_{\cdot\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

$$\lim\sigma_{\cdot\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad \lim\sigma_{\cdot\nu\delta\tau\rho} = \frac{1}{3}\left(R_{\nu\tau\delta\rho} + R_{\nu\rho\delta\tau}\right)$$

$$\lim\sigma_{\cdot\mu}{}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} = \frac{8}{5}R_{;\mu}{}^{\mu} + \frac{4}{15}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{4}{15}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\lim \Delta^{\frac{1}{2}} = 1\,, \quad \lim \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu} = 0\,, \quad \lim \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu} = -\frac{1}{6} R_{\mu\nu}$$

$$\lim \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\mu} = -\frac{1}{6} R_{;\mu}$$

$$\lim \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu}{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{5} R_{;\mu}{}^{\mu} + \frac{1}{36} R^2 - \frac{1}{30} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{30} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

(Эти пределы были вычислены Де-Виттом [3])

$$\lim g^{\mu}{}_{\nu'} = \delta^{\mu}{}_{\nu'}\,, \quad \lim g^{\mu}{}_{\nu';\varepsilon} = 0\,, \quad \lim g^{\mu}{}_{\nu';\rho\lambda} = \frac{1}{2} R^{\mu}{}_{\nu'\rho\lambda}$$

$$\lim g^{\mu}{}_{\nu';\rho\lambda\alpha} = \frac{1}{3}\left(R_{\rho\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu';\alpha} + R_{\rho\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu';\lambda}\right)$$

$$\lim g^{\mu}{}_{\nu';\rho}{}^{\rho\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu'}{}^{;\alpha\beta} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\mu} R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu'}\,.$$

Из формулы (3.I6), пользуясь этой таблицей, получаем:

$$a_0^f = 1 \qquad \lim a_1^f = \frac{1}{4} \delta_{\alpha}{}^{\beta'} \left(\Delta^{\frac{1}{2}} g^{\alpha}{}_{\beta'}\right)_{;\mu}{}^{\mu} = -\frac{1}{6} R = 0$$

$$\lim a_2^f = \frac{1}{32} \lim \delta_{\alpha}{}^{\beta'} \left[\Delta^{\frac{1}{2}} g^{\alpha}{}_{\beta'} g_{\gamma}{}^{\delta'} \left(g^{\gamma}{}_{\delta'} \Delta^{\frac{1}{2}}\right)_{;\iota}{}^{\iota}\right]_{;\mu}{}^{\mu} =$$

$$= -\frac{1}{10} R_{;\mu}{}^{\mu} + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{11}{240} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (3.I8)$$

$$\lim a_2 = -\frac{11}{240} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Аналогично для гравитонов из (3.I7) и (3.II)

$$\mathrm{tr}\, a_0 = 9 \qquad \mathrm{tr}\, a_1 = 0 \qquad [\text{illegible}] = \frac{21}{40} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Итак, мы вычислили [illegible]енты перед бесконечностями в формулах (3.I4), (3.I5[illegible]

Квадратичные бесконе[illegible] отсутствуют как для фиктивных частиц, так и для гравитонов ($a_1^f = 0$, $\mathrm{tr}\, a_1^{gr} = 0$).

Рассмотрим теперь логарифмические бесконечности; например, в слагаемом (3.14):

$$4\cdot\frac{-11}{240}\int d^4x\sqrt{g}\left[\ln\frac{\theta+i0}{2}-\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{\frac{i}{s}}\right]\Big|_{x=y}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (3.19)$$

из формулы (3.18)

Естественно считать, что $\ln\frac{\theta+i0}{2}\Big|_0=\ln 0$ не зависит от $g_{\mu\nu}$ это можно оправдать тем, что в формуле (3.14а) поменять местами пределы: сначала положить $x=y$ $\exp\frac{i\theta}{2s}=1$, а потом вычислить интеграл по s. Тогда $\ln\frac{\theta+i0}{2}$ можно вынести из-под знака интеграла в формуле (3.19)

$$\frac{-11}{60}\left[\ln\frac{\theta+i0}{2}\Big|_0-\int_\delta^\infty\frac{ds}{s}e^{\frac{i}{s}}\right]\int d^4x\sqrt{g}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Теперь надо учесть тождество:

$$\int d^4x\sqrt{g}\left(R^2-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)\equiv 0 \qquad (3.20)$$

см. 3 откуда следует, что на свободном поле:

$$\int d^4x\sqrt{g}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}=0$$

Таким образом, мы получили, что логарифмическая бесконечность в формуле (3.14) отсутствует. Если проделать аналогичные выкладки для формулы (3.15), то видно что логарифмические бесконечности $\ln\det\overset{1}{F}_{Gr}$ даются формулой:

$$\frac{21}{40}\left[\ln\frac{\theta+i0}{2}\Big|_0-\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{\frac{i}{s}}\right]\int d^4x\sqrt{g}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

То есть логарифмических бесконечностей нет и в формуле (3.15).

В августе 1973 г. Хоофт опубликовал препринт [4], в котором он показал отсутствие логарифмических бесконечностей. Он применил метод размерностной регуляризации, использовал тождество (3.20) и уравнения Эйнштейна. Наши результаты получены независимо.

Отсутствие квадратичных и логарифмических бесконечностей следует уже из соображений размерности. Действительно, из диаграммы Фейнмана видно, что однопетлевая поправка ведет себя как четвертая степень энергии, следовательно, коэффициенты перед квадратичными и логарифмическими бесконечностями ведут себя соответственно, как E^2 и E^4, но ковариантных величин второго и четвертого порядка по энергии нет:

$$R=0 \quad R^2=0, \quad R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=0 \quad \int d^4x\sqrt{g}\,R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}=0$$

Подставим теперь формулы (3.14) и (3.15) в (2.4) и получим, что бесконечная часть $e^{iW(g^{4}_{\mu\nu})}=$

$$=\prod_x g^{-1}\cdot\exp\frac{4}{(4\pi)^2}\frac{\frac{3}{2}-4}{(\delta+i0)^2}\Big|_0\cdot\int d^4x\sqrt{g} \qquad (3.21)$$

$\frac{1}{\delta^2}\Big|_0$ - не зависит от $g_{\mu\nu}$, следовательно, выражение (3.21) зависит лишь от $\sqrt{g}$. Оно явно ковариантно, т.е. не зависит от выбора дополнительного условия при решении уравнений Эйнштейна. Выберем одно из дополнительных условий

$$\sqrt{g}=1$$

тогда, очевидно, что

$$\frac{\delta^n\,\text{беск. части}\,W}{(\delta g_{\mu\nu})^n}=0$$

При выборе другого дополнительного условия имеем то же самое. Выражение (3.21) является постоянным множителем. Таким образом, производящий функционал S матрицы в однопетлевом приближении не содержит бесконечностей на поверхности масс.

§ 4. КОНЕЧНАЯ ЧАСТЬ ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА S МАТРИЦЫ

Если в формуле (3.13) заменить ряд на $f^{f}(xyS)$ по формуле (3.7), подставить ее в формулу (2.4) и проделать аналогичные выкладки для гравитонов, то получим, что

$$iW=\frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_0^\infty \frac{dS}{S^3}e^{\frac{i\sigma(xx)}{2S}}\left\{4f^{f}(xxS)-\frac{1}{2}tr f^{6\tau}(xxS)\right\} \qquad (4.1)$$

Функции $f(xyS)$ удовлетворяют уравнениям (3.6) и (3.10) и начальным условиям:

$$f^{f}(xyS)\Big|_{S=0}=1,\ \hat{f}_{6\tau}(xyS)\Big|_{S=0}=\frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha'}_{\mu'}\delta^{\beta'}_{\nu'}+\delta^{\alpha'}_{\nu'}\delta^{\beta'}_{\mu'}-\frac{1}{2}g^{\alpha'\beta'}g_{\mu'\nu'}\right) \qquad (3.6),(3.10)$$

Первых три члена разложения по S вклада в (4.1) не дают, как показано в § 3.

Желательно вывести такую формулу для выражения (4.1), которая была бы очевидным образом конечна. Сделаем это сначала для фиктивных частиц. "Фиктивная" часть формулы (4.1) равна:

$$\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_0^\infty\frac{dS}{S^3}e^{\frac{i\sigma}{2S}}\left\{f^{f}(xyS)-\theta(N-S)\left[1+iSa_1+(iS)^2a_2\right]\right\}\Big|_{x=y}+$$
$$+\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_0^N\frac{dS}{S^3}e^{\frac{i\sigma}{2S}}\left(1+iSa_1+(iS)^2a_2\right)\Big|_0 . \qquad (4.2)$$

Второе слагаемое вклада не дает, поэтому не будем его рассматривать. В первом слагаемом интеграл по S сходится в нуле, поэтому можно поменять местами пределы; сначала положить $x=y$ потом интегрировать по S.

(4.2) преобразится тогда в выражение:

$$\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\left\{f^f(xxs)-\theta(N-s)\left[1+isa_1(xx)+(is)^2a_2|_0\right]\right\} \qquad (4.3)$$

Сделаем Фурье – преобразование

$$f^f(xxs)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\cdot e^{is\omega}f^f(xx\omega)$$

и учтем, что

$$a_1=\frac{\partial f^f(xy)}{\partial s}\Big|_{s=0}\ ,\qquad a_2=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f^f}{\partial s^2}\Big|_{s=0}$$

Выражение (4.3) преобразится в

$$\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega f^f(xx\omega)\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\left\{e^{is(\omega+i0)}-\theta(N-s)\left[1+is\omega+\frac{(is\omega)^2}{2}\right]\right\} \qquad (4.4)$$

Интеграл

$$X=\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\left\{e^{is(\omega+i0)}-\theta(N-s)\left[1+is\omega+\frac{(is\omega)^2}{2}\right]\right\}$$

можно посчитать в явном виде.

Действительно, видно, что

$$\frac{\partial^3 X}{\partial(i\omega)^3}=\frac{-1}{i(\omega+i0)}$$

Отсюда следует, что

$$X=-\frac{(i\omega)^2}{2}\ln i(\omega+i0)+\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma \qquad (4.5)$$

Слагаемые $\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma$ можно отнести ко второму слагаемом в (4.2), так как они дают вклад:

$$-i\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\,e^{\frac{i\sigma}{2s}}\left(\gamma+is\,a_1\beta+\alpha(is)^2a_2\right)=const$$

Удобно использовать этот произвол так:

$$\alpha=\frac{-1}{2}\ln i m^2 \qquad \beta=\gamma=0$$

Выражение (4.4) преобразуется в выражение:

$$\frac{4}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\cdot\frac{\omega^2}{2}\cdot\ln\frac{\omega+i0}{m^2}\, f^{f}(xx\omega) \qquad (4.6)$$

m^2 - произвольная постоянная.

Проделав аналогичные выкладки, получим для "гравитонной" части формулы (4.I) выражение:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\cdot\frac{\omega^2}{2}\cdot\ln\frac{\omega+i0}{m^2}\cdot f^{f}(xx\omega)$$

Итак, мы получили, что

$$iW=\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\omega^2\ln\frac{\omega+i0}{m^2}\left\{4f^{f}(xx\omega)-\frac{1}{2}\operatorname{tr} f^{6r}(xx\omega)\right\} \qquad (4.7)$$

Если f - аналитична и быстро убывает то можно развернуть контур [illegible] Будет 0! от вычитания σ

Если переписать уравнения (3.6) и (3.IO) прямо для $f(xy\omega)$ то получим, что

$$\frac{\partial(\omega f^{f})}{\partial\omega}=\partial^{\mu} f^{f}_{;\mu}+\frac{1}{4}g^{\alpha}{}_{\beta'}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\Delta^{\frac{1}{2}}g_{\alpha}{}^{\beta'}\frac{\partial f^{f}}{\partial\omega}\right) \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial(\omega f^{\mu'\nu'}_{\alpha'\beta'})}{\partial\omega}=\partial^{\lambda}(f_{;\lambda})^{\mu'\nu'}_{\alpha'\beta'}+g_{\omega}{}^{\mu'}g_{s}{}^{\nu'}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left[\Delta^{\frac{1}{2}}g^{\omega}{}_{\lambda'}g^{s}{}_{\nu'}\frac{\partial f^{\lambda'\nu'}_{\alpha'\beta'}}{\partial\omega}\right]_{;\theta}{}^{\theta}-$$

$$-2g_{\theta}{}^{\mu'}g_{\xi}{}^{\nu'}R^{\theta}{}_{\lambda}{}^{\xi}{}_{s}g^{\lambda}{}_{\iota'}g^{s}{}_{\gamma'}\frac{\partial f^{\iota'\gamma'}_{\alpha'\beta'}}{\partial\omega} \qquad (4.9)$$

Эти уравнения следует решать методом теории возмущения по $\delta g_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$

$\eta_{\mu\nu}$ - метрический тензор плоского пространства времени.

Представим f в виде:

$$f(g_{\mu\nu})=\sum_{n=0}^{\infty}(\delta g_{\alpha\beta})^{n} f_0^{(n)(\alpha\beta)^n} \qquad f_0=I\cdot\delta(\omega)$$

Под сверткой подразумевается свертка по значкам и интегрирование. Чтобы узнать $f_0^{(n)}$ по $f_0^{(K)}$ с меньшими индексами, следует решить уравнение:

$$\frac{\partial(\omega f^{(n)})}{\partial\omega}-(x-y)^{\mu} f^{(n)}-\Pi\frac{\partial f^{(n)}}{\partial\omega}=\Phi(\omega x y)$$

Величина $\Phi \equiv (\hat{F}-\Box)\frac{\partial f}{\partial \omega} + (g^{\mu\nu}-(x-y)^{\mu}(x-y)^{\nu}) f_{,\mu\nu}$

определяется через $f^{(k)}$, где $k<n$

Если сделать преобразование Фурье:

$$\Phi(\omega x y) = \int e^{-ikx-ipy}\,\Phi(\omega;k;p)\,d^4k\,d^4p$$

$$f(\omega x y) = \int e^{-ikx-ipy} f(\omega;k;p)\,d^4k\,d^4p$$

то

$$f(\omega,kp) = -\int_1^{\infty} d\tau\cdot\tau^4\,\Phi\left[\tau(\omega-k^2)+\tau^2k^2;\,k\tau;\,p+k-k\tau\right] \tag{4.10}$$

Итак формулы (4.7) и (4.8) дают вид конечной части производящего функционала S матрицы на поверхности масс.
Формула (4,7) применима для однопетлевого приближения в любой теории, а не только в гравитации, надо лишь соответствующим образом переписать уравнения (3.6) и (3.10). Формула (4.6) была получена при попытке истолковать формулу Де-Витта 3 для конечной части аналогичного функционала, которая говорит, что

$$\int d^4x\,\mathcal{L}_{conf} = \int d^4x\sqrt{g}\,\frac{1}{8\pi^2}\,T\,\ln(-\hat{R}-i0)\,\hat{R}^2\,1$$

Здесь T - символ T произведения, $\hat{R}$ не кривизна, а оператор:

$$\hat{R}(xy) = \int_{-\infty}^{0} dt\,e^{t}\,\exp\left(ig^{\mu\nu}t\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)\left\{\Delta^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{g}\,g^{\lambda\omega}\frac{\partial}{\partial x^{\omega}}g^{-\frac{1}{4}}\Delta^{\frac{1}{2}}\right\}\exp\left(-ig^{\mu\nu}t\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) \tag{4.11}$$

Эта формула содержит логарифм под знаком T - произведения, следовательно, она не определена не интуитивно, не математически. Формула (4.6) является фактической расшифровкой формулы (4.II)

§ 5. ВКЛАД ПЕТЛИ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Перепишем еще раз формулу (4,7):

$$iW=\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{g}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\omega^2\ln\frac{\omega+i0}{m^2}\left\{4f^{s}(xx\omega)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,f^{6\iota}(xx\omega)\right\} \qquad (4,7)$$

Рассмотрим теперь амплитуду упругого рассеяния двух гравитонов. Пусть s, u, t манделстамовские переменные, ясно, что

$$s+t+u=0$$

а ω по размерности совпадает с t или s.
Обозначим амплитуду упругого рассеяния двух гравитонов через A.

Тогда из (4,7) видно, что

$$\mathcal{A}(st)=s^2\varphi(s,t,m^2)$$

Функция $\varphi(s,t,m^2)$ зависит лишь от безразмерных параметров, т.е.

$$\varphi(s,t,m^2)=\varphi\left(\frac{t}{s};\frac{t}{m^2};\frac{s}{m^2}\right)$$

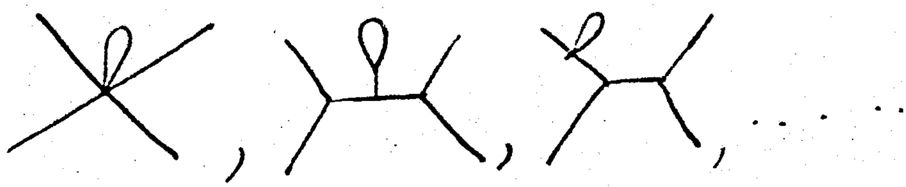
Так как от m^2 ничего не зависит, то можно положить $m^2=s$ тогда ясно, что

$$\mathcal{A}(st)=s^2\varphi\left(\frac{t}{s}\right)$$

Задача состоит в том, чтобы из уравнений Эйнштейна, уравнений (4.8), (4.9) и формулы (4.7) вычислить $\varphi\left(\frac{t}{s}\right)$. Вместо того, чтобы дифференцировать $iW(g_{\mu\nu})$ по асимптотическим полям, удобнее дифференцировать iW по классическим полям. Зависимость от асимптотических полей входит лишь через зависимость от классических полей. Итак, ясно, что символически

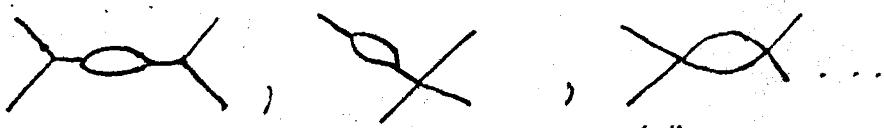
$$\mathcal{A}(s,t)=\frac{\delta^4 iW}{(\delta g^{as}_{\alpha_i\beta_i})^4}=\left\{\frac{\delta^4 g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}{(\delta g^{as}_{\alpha_i\beta_i})^4}\frac{\delta}{\delta g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}+\left[4\frac{\delta^3 g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}{(\delta g^{as}_{\alpha_i\beta_i})^3}\cdot\frac{\delta g^{cl}_{\mu_n\nu_n}}{\delta g^{as}_{\alpha_n\beta_n}}+3\left(\frac{\delta^2 g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}{\delta g^{as\,2}_{\alpha_i\beta_i}}\right)^2\right]\cdot\frac{\delta^2}{\delta g^{cl\,2}_{\mu_i\nu_i}}+6\frac{\delta^2 g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}{\delta g^{as\,2}_{\alpha_i\beta_i}}\left(\frac{\delta g^{cl}_{\mu_n\nu_n}}{\delta g^{as}_{\alpha_n\beta_n}}\right)^2\frac{\delta^3}{\delta g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}+\left(\frac{\delta g^{cl}_{\mu_i\nu_i}}{\delta g^{as}_{\alpha_i\beta_i}}\right)^4\frac{\delta^4}{\delta g^{cl\,4}_{\mu_i\nu_i}}\right\}(iW)\Big|_{g^{cl}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \quad (5.\mathrm{I})$$

Прежде всего в этой формуле решение уравнений Эйнштейна отделено от решения уравнений (4.8), (4.9). Каждое слагаемое в (5.I) имеет ясный смысл: первое слагаемое представляет собой вклад головастиков, т.е. диаграммы



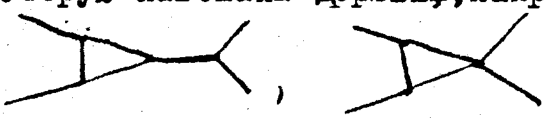
второе слагаемое представляет собой вклад петли с двумя точками

на которую навешаны деревья, например:

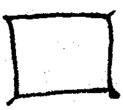


третье слагаемое представляет собой вклад петли с тремя концами

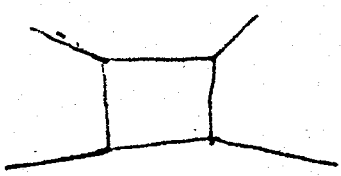
на которую навешаны деревья, например:



четвертое слагаемое представляет собой вклад петли с четырьмя концами



например,



Разберем теперь по отдельности вклад головастиков и диаграммы:

(сплошная линия -гравитоны, пунктир - фиктивные частицы).

I. Оценим вклад головастиков

Для этого необходимо вычислить

$$\left.\frac{\delta iW}{\delta g^{(k)}_{\mu\nu}}\right|_{\eta_{\mu\nu}}$$

Из размерности формулы (4.7) ясно, что

$$\left.\frac{\delta iW}{\delta g^{(k)}_{\mu\nu}}\right|_{\eta_{\mu\nu}} \sim k^4$$

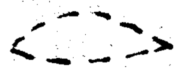
но из трансляционной инвариантности

$$\left.\frac{\delta iW}{\delta g^{(k)}_{\mu\nu}}\right|_{\eta_{\mu\nu}} \sim \delta^4(k)$$

Отсюда ясно, что

$$\left.\frac{\delta iW}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{\eta_{\mu\nu}} = 0$$

Итак, головастики не дают вклада.

2. Оценим вклад вставки  и  , т.е. петли с двумя точками. Для этого необходимо вычислить

$$\left.\frac{\delta^2 iW}{\delta g^{d}_{\mu_1\nu_1}(k_1)\,\delta g^{d}_{\mu_2\nu_2}(k_2)}\right|_{\eta_{\mu\nu}}$$

Если при интеграции уравнения Эйнштейна взять дополнительное условие $\partial_\mu g^d_{\mu\nu}=0$, то ясно, что

$$\frac{\delta^2 iW}{\delta g^{(k_1)}_{\mu_1\nu_1}\,\delta g^{(k_2)}_{\mu_2\nu_2}} = \delta^4(k_1+k_2)\cdot k_1^4\left(A\,\delta^{(\alpha_1\beta_1)}_{(\alpha_2\beta_2)} + B\,\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}\right) \qquad (5.2)$$

(из формулы (4.7) и трансляционной инвариантности)

Исходя из явного вида амплитуды (5.2) докажем, что

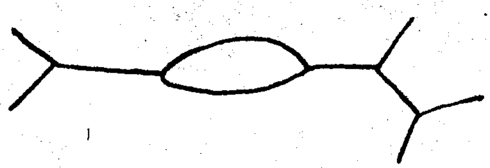
$$\left.\frac{\delta^2 iW}{\delta g_{\mu_1\nu_1}\,\delta g_{\mu_2\nu_2}}\right|_{\eta_{\mu\nu}} = \left.\frac{\delta^2\int d^4x\sqrt{g}\,(CR^2 + D\cdot R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})}{\delta g_{\mu_1\nu_1}\,\delta g_{\mu_2\nu_2}}\right|_{\eta_{\mu\nu}} = 0$$

Действительно,

$$\frac{\delta^2\int d^4x\sqrt{g}\,R^2}{\delta g_{\lambda_1\beta_1}\,\delta g_{\lambda_2\beta_2}}\Bigg|_{\eta_{\mu\nu}} = 2\cdot(2\pi)^4\,\delta^4(K_1+K_2)\cdot\delta^{\lambda_1}_{\beta_1}\cdot\delta^{\lambda_2}_{\beta_2}\cdot K_1^4$$

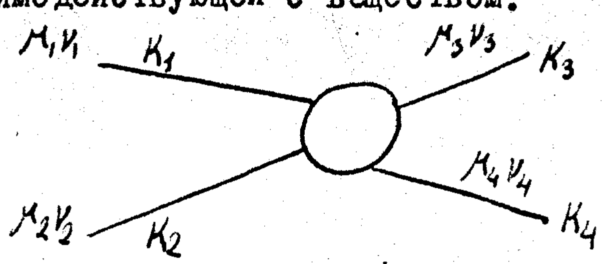
$$\frac{\delta^2\int d^4x\sqrt{g}\,R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}}{\delta g_{\lambda_1\beta_1}\,\delta g_{\lambda_2\beta_2}}\Bigg|_{\eta_{\mu\nu}} = 2(2\pi)^4\delta^4(K_1+K_2)\left(\delta^{\lambda_1}_{\beta_1}\delta^{\lambda_2}_{\beta_2}+\delta^{(\lambda_1\beta_1)}_{(\lambda_2\beta_2)}\right)\cdot K_1^4$$

Таким образом, вклад диаграмм (двухточечных петель)  в 4-хвостку равен нулю. Ясно, что их вклад в любую n -хвостку равен нулю (в однопетлевом приближении).

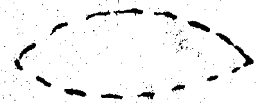


Этот результат в августе 1973 года был также получен Хонеркампом, использовавшим существенно другой подход. Мы получили этот результат независимо.

Таким образом, проведено исследование первого приближения простейшей амплитуды, возникающей в квантовой гравитации, не взаимодействующей с веществом.



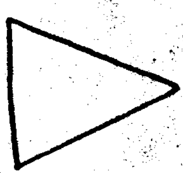
Получилась любопытная ситуация. Согласно дайсоновскому счету, индекс расходимости диаграммы равен $2(K+1)$, где K - число петель I4, следовательно, теория неперенормируема. Однако, в однопетлевом $(K=1)$ приближении эту проблему удается обойти. На поверхности масс, благодаря явной ковариантности и уравнения движения, бесконечности вообще отсутствуют. Следотвием этого же факта является нулевой вклад вставок

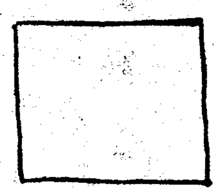


в диаграммы.

Формула (4.7), повидимому, представляет собой некоторый самостоятельный интерес, как явное выражение конечной части полностью отсуммированного ряда однопетлевых диаграмм.

В настоящее время мы решаем естественную ближайшую задачу: подсчет вклада диаграмм





В заключение хочется выразить благодарность Л.Д.ФАДДЕЕВУ за предоставление интересной темы, полезные дискуссии и постоянное внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Доклад Л.Д.ФАДДЕЕВА на кафедре квантовой теории поля ЛГУ.

2. Н.П.КОНОПЛЕВА, В.Н.ПОПОВ "Калибровочные поля", Атомиздат, 1972

3. Relativity Groups & Topology. B.S. De Witt Dynamical Theory of Groups and Fields

4. Препринт, 1973 г.

5. Препринт, 1973 г.

6. P.A.M. Dirac Proc. Roy Soc. A 246, 333 (1958)

7. R Arnowitt, S Deser, C.W. Misner Phys Rev 117, 1595 (1960)

8. J Schwinger ibid 130. 1253; 132, 1317 (1963)

9. P Bergman. Rev. Mod Phys 33. 510. (1961)

10. J.L. Anderson. ibid. 36. 929 (1964)

II. Л.Д.ФАДДЕЕВ. Гамильтонова формулировка теории тяготения. Тезисы 5-й Международной конференции по гравитации и относительности. Тбилиси (1966 г.)

12. S.N Gupta, Proc. Roy. Soc. A65. 161. 608 (1952)

13. R.P Feynman. Acta Phys. Polon. 24.6. (1963)

14. B.S De-Witt, Phys Rev. 160. 1113; 162, 1195, 1239 (1967)

15. В.Н.ПОПОВ, Л.Д.ФАДДЕЕВ. Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей. Препринт. ИТФ. АН УССР Киев (1967 г.)

L. D. Faddeev; V.N Popov, Phys. Lett. B25, 29 (1967).