

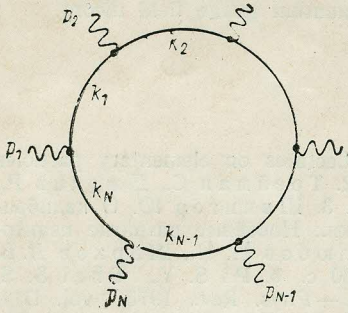
## О РЕДУКЦИИ ОДНОПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

**Введение.** Данная работа посвящена выводу редукционной формулы для однопетлевых диаграмм в скалярной квантовой теории поля. Эта формула сводит вычисление произвольной однопетлевой диаграммы к вычислению однопетлевой диаграммы с числом внутренних линий, равным размерности  $n$  пространства-времени. Для случая  $n=2$  она хорошо известна [1, 2] и дает возможность установить структуру  $S$ -матрицы в двумерных теориях поля [2, 3]. Гораздо менее известен, однако, факт существования подобной формулы для произвольного  $n$ , установленный в работах [4, 5]. Здесь мы предлагаем метод вычисления однопетлевых диаграмм, приводящий к простому выводу редукционной формулы. Он является по существу обобщением известной процедуры, позволяющей снять в диаграмме интегрирование по временной компоненте  $k_0$  импульса интегрирования  $k$  с помощью продолжения подынтегрального выражения в комплексную плоскость  $k_0$  и последующего интегрирования по  $k_0$  по вычетам. Оказывается, что в однопетлевой диаграмме можно осуществить интегрирование по вычетам последовательно по всем компонентам импульса  $k$  при произвольном  $n$ . Этот метод, по-видимому, может быть естественно распространен и на нескalaraные теории поля, а также на многопетлевые диаграммы.

В п. 1 вводятся обозначения и формулируется правило редукции однопетлевых диаграмм для произвольного  $n$ . В п. 2 приводится вывод этого правила. В п. 3 получены некоторые формулы, используемые при выводе.

1. Рассмотрим евклидову квантовую теорию скалярных полей с полиномиальным взаимодействием в  $n$ -мерном пространстве-времени.

Число полей и их массы  $m_i$  могут быть произвольными; предполагаем только, что  $\min\{m_i\} > 0$ . Вопрос о вычислении однопетлевых диаграмм



с  $N > n$  внутренними линиями в такой теории сводится к вопросу о вычислении однопетлевых диаграмм в теории с тройными вершинами (см. рисунок). Обозначим через  $p_{ki}$  внешний импульс, втекающий между вершинами  $i$  и  $k+1$  диаграммы, причем направление от вершины  $i$  к вершине  $k$  отсчитывается по часовой стрелке:  $p_{ki} = p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k = -p_{ik}$ ;  $p_{ii} = 0$ . Обозначая через  $k_i$  импульс, текущий по внутренней линии от вершины  $i$  к вершине  $i+1$ , имеем  $k_j = k_i + p_{ji}$ . По обычным фейн-

мановским правилам, не учитывая постоянных множителей, стоящих в вершинах, сопоставим диаграмме на рисунке выражение ( $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 0$ ):

$$\int d^n k_i \prod_{j=1}^N (k_j^2 + m_j^2)^{-1} \equiv D_N^{(n)}(m_1^2, \dots, m_N^2; p_1, \dots, p_N). \quad (1)$$

Интеграл здесь сходится и не зависит от того, по какому именно из внутренних импульсов  $k_i$  ведется интегрирование. При  $m_j^2 > 0$   $D_N^{(n)}$  представляет собой гладкую и быстроубывающую функцию внешних импульсов и масс.

Мы предполагаем, что внешние импульсы на диаграмме выбраны так, что выполняются следующие условия. Для диаграммы с  $N = n$  требуем, чтобы любые  $n-1$  из импульсов  $p_i$  были линейно-независимы. Для диаграмм с  $N > n$  при любом разбиении импульсов  $p_i$  на  $n+1$  частичных сумм  $p_{a_2 a_1}, p_{a_3 a_2}, \dots, p_{a_{n+1} a_n}, p_{a_1 a_{n+1}}$  (здесь  $a_i > a_j$  при  $i > j$ ;  $p_{a_2 a_1} + p_{a_3 a_2} + \dots + p_{a_{n+1} a_n} + p_{a_1 a_{n+1}} = 0$ ) любые  $n$  из этих векторов линейно-независимы. Очевидно, импульсы  $p_i$  «общего положения» удовлетворяют этим условиям. Будем называть данные условия условиями А.

Сформулируем теперь правило редукции для диаграммы  $D_N^{(n)}$ , введенной в (1). Это правило сводит  $D_N^{(n)}$  к сумме  $2C_N^n$  слагаемых, каждое из которых есть произведение однопетлевой диаграммы с  $n$  внутренними линиями  $D_n^{(n)}$  на древовидную диаграмму, не содержащую уже интегрирований:

$$D_N^{(n)} = \sum_{a_1 < a_2 < \dots < a_n} \left[ \frac{1}{2} \int d^n k_{a_i} \prod_{i=1}^n (k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1} \right] \times \left\{ \prod_{l \neq a_i} [(k_l^+)^2 + m_l^2]^{-1} + \prod_{l \neq a_i} [(k_l^-)^2 + m_l^2]^{-1} \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $k_{a_i} = k_{a_1} + p_{a_i a_1}$ ;  $k_i^\pm = k_{a_1}^\pm + p_{i a_1}$ , причем величины  $k_{a_1}^\pm$  — точки «совместного полюса» пропагаторов  $(k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1}$  — определяются как решения системы  $n$  уравнений

$$k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2 = (k_{a_1} + p_{a_i a_1})^2 + m_{a_i}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

имеющей два решения  $k_{a_1}^+$ ,  $k_{a_1}^-$  (см. (24)). Формулу (2) можно интерпретировать как результат «вынесения» из-под знака интеграла для

$D_N^{(n)}$  в (1)  $N - n$  пропагаторов  $(k_i^2 + m_i^2)^{-1}$  в точке совместного полюса остающихся под знаком интеграла  $n$  пропагаторов  $(k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1}$  и последующего суммирования по наборам  $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ . Остающиеся под знаком суммы в (2) «стандартные» интегралы есть выражения для диаграммы  $D_n^{(n)}(m_{a_1}^2, \dots, m_{a_n}^2; p_{a_2 a_1}, p_{a_3 a_2}, \dots, p_{a_n a_{n-1}})$ , у которой число внутренних линий равно размерности пространства-времени. Формула (2) является поэтому многомерным аналогом одномерной формулы вычисления интеграла по вычетам.

Редукционная формула (2) аналогична правилу Кутковского [6] для вычисления скачка диаграммы  $D_N^{(n)}$  на разрезе, соответствующем неприводимой особенности Ландау этой диаграммы. Отметим, однако, что равенство (2) нельзя, по-видимому, интегрировать, так как при этом существенный вклад могут давать импульсы, не удовлетворяющие условиям  $A$ . Другими словами, в правой части (2) могут содержаться  $\delta$ -образные особенности по внешним импульсам.

Чтобы закончить формулировку редукционной формулы, выпишем явный вид пропагаторов, входящих в древовидные сомножители в (2):

$$\begin{aligned} & [(k_i^\pm)^2 + m_i^2]^{-1} = \\ & = \det L^{\{a_i\}} \left[ H_i^{\{a_i\}} \pm i(p_{l a_i}, p_{a_2 a_1} \otimes p_{a_3 a_2} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_{n-1}}) \sqrt{C^{\{a_i\}}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $L_{a_k a_l}^{\{a_i\}}$  — матрица размерности  $(n-1)(n-1)$ , индексы которой  $a_k, a_l$  пробегает значения  $a_2, a_3, \dots, a_n$ :

$$L_{a_k a_l}^{\{a_i\}} = (p_{a_k a_1}, p_{a_l a_1}); \quad (5)$$

$$H_i^{\{a_i\}} = \det L^{\{a_i\}} \left[ P_{l a_i}^2 - (L^{\{a_i\}})_{a_i a_k}^{-1} P_{a_k a_1}^2 (p_{l a_1}, p_{a_k a_1}) \right], \quad (6)$$

$$C^{\{a_i\}} = 4m_{a_1}^2 \det L^{\{a_i\}} + P_{a_i a_1}^2 (L^{\{a_i\}})_{a_i a_k}^{-1} P_{a_k a_1}^2 \det L^{\{a_i\}}, \quad (7)$$

$$P_{l a_1}^2 = p_{l a_1}^2 + m_l^2 - m_{a_1}^2.$$

Вектор  $(p_{a_2 a_1} \otimes p_{a_3 a_1} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_1})^\mu = \varepsilon^{\mu \mu_2 \dots \mu_n} p_{a_2 a_1}^{\mu_2} \dots p_{a_n a_1}^{\mu_n}$  — «векторное» произведение  $n-1$  векторов  $n$ -мерного пространства;  $(p_{l a_1}, p_{a_2 a_1} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_1}) = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} p_{l a_1}^{\mu_1} \dots p_{a_n a_1}^{\mu_n}$  — «объем» параллелепипеда, построенного на  $n$  векторах  $p_{l a_1}, p_{a_2 a_1}, \dots, p_{a_n a_1}$ . При выполнении условий  $A$  на внешние импульсы определитель Грама отличен от нуля:

$$\det L^{\{a_i\}} = (p_{a_2 a_1} \otimes p_{a_3 a_2} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_{n-1}})^2 \neq 0. \quad (8)$$

Формулы (4)–(8) выведены в п. 3, где показано также, что выражение в фигурных скобках в (2) является рациональной функцией внешних импульсов и масс. Они будут существенно использоваться в п. 2.

2. Идея нашего метода вычисления диаграммы (1) состоит в последовательном интегрировании по вычетам по каждой из компонент вектора  $k$ . Доказательство формулы (2) будем проводить индукцией по  $n$ . Базой индукции служит  $n=1$ ; в этом случае справедливость формулы (2) легко проверить, выполнив обычное интегрирование по вычетам. Предположим, что (2) имеет место при некотором  $n$ , и покажем, что отсюда следует истинность формулы в пространстве-времени размерности  $n+1$ .

Рассмотрим диаграмму ( $N \geq n+1$ )

$$\begin{aligned} D_N^{(n+1)}(m_1^2, \dots, m_N^2; p_1, \dots, p_N) &= \int dk_a^{n+1} \int d^n \mathbf{k}_a \prod_{i=1}^N (k_i^2 + m_i^2)^{-1} = \\ &= \int dk_a^{n+1} \int d^n \mathbf{k}_a \prod_{i=1}^N (k_i^2 + M_i^2)^{-1} = \\ &= \int dk_a^{n+1} D_N^{(n)}(M_1^2, \dots, M_N^2; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $k = (k^1, \dots, k^n, k^{n+1}) \equiv (\mathbf{k}, k^{n+1})$ ;  $M_j^2 = m_j^2 + (k_j^{n+1})^2 \geq m_j^2$ .

Если условия  $A$  для векторов  $p_i$  выполнены в  $(n+1)$ -мерном пространстве-времени, то можно так выбрать направление  $(n+1)$ -й оси, чтобы  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{p}_i$  удовлетворяли условиям  $A$  в  $n$ -мерном пространстве-времени. Поэтому для величины  $D_N^{(n)}$ , входящей в (9), можно воспользоваться редукционной формулой (2):

$$\begin{aligned} D_N^{(n+1)} &= \sum_{\{a_1 < \dots < a_n\}} \int dk_{a_1}^{n+1} \left( \frac{1}{2} \int d^n \mathbf{k}_{a_1} \prod_{j=1}^n [k_{a_j}^2 + M_{a_j}^2]^{-1} \right) \times \\ &\times \left\{ \prod_{l \neq a_1} [(k_l^+)^2 + M_l^2]^{-1} + \prod_{l \neq a_1} [(k_l^-)^2 + M_l^2]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\int d^n \mathbf{k}_{a_1} \prod_{i=1}^n [k_{a_i}^2 + M_{a_i}^2]^{-1} = \\ &= D_n^{(n)}(M_{a_1}^2, \dots, M_{a_n}^2; \mathbf{p}_{a_2 a_1}, \dots, \mathbf{p}_{a_1 a_n}) \equiv D^{\{a_1\}}(k_{a_1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Функция  $D^{\{a_1\}}(k_{a_1}^{n+1})$  зависит от  $k_{a_1}^{n+1} = k_{a_1}^{n+1} - p_{a_1 a_1}^{n+1}$  через  $M_{a_1}^2$ ; нетрудно показать, что  $D^{\{a_1\}}$  как функция  $k_{a_1}^{n+1}$  не имеет особенностей на пути интегрирования. Нам удобно представить  $D^{\{a_1\}}$  следующим образом:

$$D^{\{a_1\}}(k^{n+1}) = \sum_{p=1}^2 D_p^{\{a_1\}}(k^{n+1}), \quad (12)$$

$$D_1^{\{a_1\}}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx D^{\{a_1\}}(x)}{x - k}, \quad \text{Im } k > 0,$$

$$D_2^{\{a_1\}}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx D^{\{a_1\}}(x)}{x - k}, \quad \text{Im } k < 0. \quad (13)$$

Для дальнейшего важно иметь в виду, что каждая из функций  $D_p^{\{a_1\}}$  зависит лишь от импульсов  $p_{a_2 a_1}, \dots, p_{a_1 a_n}$  (причем от  $p_{a_{i+1} a_i}^{n+1}$  через  $M_{a_i}^2$ ), от масс  $m_{a_1}, \dots, m_{a_n}$  и от  $k_{a_1}^{n+1}$ . Функция  $D_1^{\{a_1\}}$  аналитична по  $k$  в верхней полуплоскости,  $D_2^{\{a_1\}}$  — в нижней, причем в области своей аналитичности они убывают как  $|k|^{-1}$  (фактически можно показать, что эти функции имеют общую полосу аналитичности  $|\text{Im } k| < \min \{m_i\}$ ).

Рассмотрим теперь зависимость от  $k_{a_i}^{n+1}$  выражения в фигурных скобках в (10):

$$\left\{ \prod_{l \neq a_i} [(k_l^+)^2 + M_l^2]^{-1} + \prod_{l \neq a_i} [(k_l^-)^2 + M_l^2]^{-1} \right\} = T_+^{(a_i)} + T_-^{(a_i)}. \quad (14)$$

Из формул (6)–(8) следует, что

$$[(k_l^\pm)^2 + M_l^2]^{-1} = \det L^{(a_i)} \left\{ H_l^{(a_i)} \pm i (\mathbf{p}_{l a_i}, \mathbf{p}_{a_2 a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{p}_{a_n a_1}) (C^{(a_i)})^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1}, \quad (15)$$

$$H_l^{(a_i)} = \det L^{(a_i)} [P_{l a_i}^2 - (L^{(a_i)})_{a_i a_k}^{-1} P_{a_k a_1}^2 (\mathbf{p}_{l a_i}, \mathbf{p}_{a_k a_1})], \quad P_{l a_i}^2 = \mathbf{p}_{l a_i}^2 - M_l^2 - M_{a_i}^2,$$

$$C^{(a_i)} = 4M_{a_1}^2 \det L^{(a_i)} + P_{a_i a_1}^2 (L^{(a_i)})_{a_i a_k}^{-1} P_{a_k a_1}^2 \det L^{(a_i)}.$$

Все эти величины зависят от  $k_{a_i}^{n+1}$  только через массы, и, следовательно,  $P_{l a_i}^2$  и  $H_l^{(a_i)}$  есть линейные, а  $C^{(a_i)}$  — квадратичные функции  $k_{a_i}^{n+1}$ . Выражение в фигурных скобках (14) есть четная функция  $\sqrt{C^{(a_i)}}$  и является поэтому мероморфной функцией  $k_{a_i}^{n+1}$ . Исследуем вопрос о положении полюсов этой функции. Уравнение для обращения в нуль выражения в фигурных скобках в (15) сводится к квадратному уравнению с вещественными коэффициентами, причем для знаков  $\pm$  в (15) получается одно и то же уравнение. Благодаря условиям  $A (\mathbf{p}_{l a_i}, \mathbf{p}_{a_2 a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{p}_{a_n a_1}) \neq 0$ . Как показано в п. 3, формула (25),

$C^{(a_i)} \geq 0$ . Следовательно, квадратное уравнение имеет два несовпадающих корня, один в верхней, другой в нижней полуплоскости. Один из них является полюсом пропагатора  $[(k_l^+)^2 + M_l^2]^{-1}$ , другой — пропагатора  $[(k_l^-)^2 + M_l^2]^{-1}$ . То, что полюсы в (14) простые, т. е. пропагаторы с различным  $l$  имеют полюсы в различных точках, следует из обсуждения в конце п. 3, откуда непосредственно видно, что  $(n+2)$  пропагаторов не могут иметь «совместный полюс». Обращение в нуль выражения в фигурных скобках в (15) приводит как раз к совместному полюсу пропагаторов  $(k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) и  $(k_i^2 + m_i^2)^{-1}$ .

Интеграл (10) можно, следовательно, переписать так:

$$D_N^{(n+1)} = \sum_{\{a_i < \dots < a_n\}} \int dk_{a_i}^{n+1} D_1^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1}) [T_+^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1}) + T_-^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1})] + \\ + \sum_{\{a_i < \dots < a_n\}} \int dk_{a_i}^{n+1} D_2^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1}) [T_+^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1}) + T_-^{(a_i)}(k_{a_i}^{n+1})]. \quad (16)$$

В первом слагаемом «загнем» контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, во втором — в нижнюю. Каждый из интегралов в (16) вычислится как сумма вычетов. Величина  $D_N^{(n+1)}$  может быть, таким образом, сосчитана по вычетам путем деформации контура интегрирования к  $2(N-n)$  контурам  $C^\pm$ , представляющим собой окружности малого радиуса вокруг одного из полюсов подынтегрального выражения. В окрестности такого полюса все остальные  $N-n-1$  пропагаторов в фигурных скобках могут быть вынесены из-под знака интеграла в точке полюса. Развертывая затем контур интегрирования обратно на вещественную ось, получаем для (16) представление в виде суммы  $2C_N^{n+1}$  слагаемых, являющихся произведением  $(N-n-1)$  «вынесенных» про-

пагаторов, на интеграл, в подынтегральную функцию которого входит произведение  $n$  пропагаторов  $(k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1}$ ,  $i=1, \dots, n$ , и некоторого полюсного сомножителя от пропагатора  $(k_{a_{n+1}}^2 + m_{a_{n+1}}^2)^{-1}$ :

$$D_N^{(n+1)} = \sum_{p=1}^2 \sum_{\alpha=\pm} \sum_{\{a_1, \dots, a_n\}} \prod_{l \neq a_i} (k_l^2 + m_l^2)^{-1} \int dk_{a_1}^{n+1} D_p^{(a_1 \dots a_n)} (k_{a_1}^{n+1}) \times \\ \times [(k_{a_{n+1}}^\alpha)^2 + M_{a_{n+1}}^2]^{-1}. \quad (17)$$

Существенно, что «вынесенные» пропагаторы должны быть в точке «совместного полюса» пропагаторов  $a_1, \dots, a_{n+1}$ , определенной из условий  $k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2 = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n+1$ . Таких точек всего две:  $k_{a_i}^\pm$ . В итоге, собирая слагаемые при одинаковых древовидных сомножителях, приходим к представлению для функции  $D_N^{(n+1)}$

$$D_N^{(n+1)}(m_1^2, \dots, m_N^2; p_1, \dots, p_N) = \\ = \sum_{a_1 < \dots < a_{n+1}} \left\{ \Phi_1^{(a_i)}(m_{a_1}^2, \dots, m_{a_{n+1}}^2; p_{a_1 a_2}, \dots, p_{a_{n+1} a_1}) \prod_{l \neq a_i} [(k_l^+)^2 + m_l^2]^{-1} + \right. \\ \left. + \Phi_2^{(a_i)}(m_{a_1}^2, \dots, m_{a_{n+1}}^2; p_{a_1 a_2}, \dots, p_{a_{n+1} a_1}) \prod_{l \neq a_i} [(k_l^-)^2 + m_l^2]^{-1} \right\}. \quad (18)$$

Вид функций  $\Phi_i$ , как это следует из их построения, не зависит от  $N$ . Выбирая  $N = n+1$ , получим

$$\sum_{p=1}^2 \Phi_p^{(a_i)}(m_{a_1}^2, \dots, m_{a_{n+1}}^2, p_{a_1 a_2}, \dots, p_{a_{n+1} a_1}) = \int d^{n+1} k_{a_1} \prod_{i=1}^n [k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2]^{-1}, \quad (19)$$

т. е. просто диаграмму с  $(n+1)$  внутренними линиями в  $(n+1)$ -мерном пространстве-времени. Поэтому, используя формулу (18), получаем

$$D_N^{(n+1)} = \sum_{a_1 < \dots < a_{n+1}} \left( \frac{1}{2} \int d^{n+1} k_{a_1} \prod_{i=1}^n (k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2)^{-1} \right) \times \\ \times \left\{ \prod_{l \neq a_i} [(k_l^+)^2 + m_l^2]^{-1} + \prod_{l \neq a_i} [(k_l^-)^2 + m_l^2]^{-1} \right\} = \\ = \sum_{a_1 < \dots < a_{n+1}} \Delta^{(a_i)}(m_{a_1}^2, \dots, m_{a_{n+1}}^2, p_{a_1 a_2}, \dots, p_{a_{n+1} a_1}) \times \\ \times \left\{ \prod_{l \neq a_i} [(k_l^+)^2 + m_l^2]^{-1} - \prod_{l \neq a_i} [(k_l^-)^2 + m_l^2]^{-1} \right\}, \quad (20)$$

где  $\Delta^{(a_i)} = \frac{1}{2} (\Phi_1^{(a_i)} - \Phi_2^{(a_i)})$ . Существенно, что  $\Delta$  на самом деле зависит лишь от  $n$  импульсов, поскольку  $p_{a_1 a_2} + \dots + p_{a_{n+1} a_1} = 0$ .

Покажем теперь, что сумма в правой части (20) равна нулю, и тем самым завершим доказательство. Из выражения (4) для  $[(k_l^\pm)^2 + m_l^2]^{-1}$  следует, что в фигурных скобках в левой части (20) стоит скалярная величина, а в фигурных скобках в правой части — псевдоскалярная величина (меняющая знак при отражении любой оси в пространстве импульсов). Вся левая часть равенства (20) представляет собой скаляр в  $(n+1)$ -мерном пространстве импульсов. Сравнивая левую и правую части (20), видим, что лишь части  $\Delta^{(a_i)}$ , преобразую-

щиеся как псевдоскаляр, могут дать ненулевой вклад в сумму в правой части. Но среди аргументов  $\Delta^{\{a_i\}}$  всего лишь  $n$  линейно-независимых векторов  $p_{a_i a_k}$ , псевдоскалярная же величина в  $(n+1)$ -мерном пространстве может быть построена только из  $(n+1)$  линейно-независимых векторов  $(\varepsilon^{\mu_1} \dots \mu_{n+1} p_{\mu_1}^1 \dots p_{\mu_{n+1}}^{n+1})$ . Отсюда и следует, что правая часть (20) равна нулю. Тем самым индукционное доказательство завершается.

3. В этом разделе исследуем решения системы уравнений (3) и получим формулы (4)–(7). Вычитая из уравнений (3) при  $i=2, \dots, n$  уравнение с  $i=1$ , получим

$$k_{a_i}^2 + m_{a_i}^2 = 0, \quad (21)$$

$$2(p_{a_i a_1}, k_{a_i}) + P_{a_i a_1}^2 = 0, \quad i=2, \dots, n. \quad (22)$$

Это система  $n$  уравнений для определения  $n$  компонент вектора  $k_{a_i}$ . Будем искать ее решение в виде

$$k_{a_i}^\mu = \sum_{i=2}^n A_{a_i}^{\mu} p_{a_i a_1}^\mu + B^{\{a_i\}} (p_{a_i a_1} \otimes p_{a_i a_1} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_1})^\mu. \quad (23)$$

Величина  $B^{\{a_i\}}$  не входит в (22), так что (22) представляет систему  $(n-1)$  линейных уравнений для определения величин  $A_{a_i}^{\mu}$  ( $i=2, \dots, n$ ). При выполнении условий  $A$  на внешние импульсы, как нетрудно видеть, определитель Грама (8) отличен от нуля, и система (22) имеет единственное решение (см. формулы (5)–(7)):  $A_{a_i}^{\mu} = -\frac{1}{2} (L^{\{a_i\}})^{-1}_{a_i a_k} P_{a_1 a_k}^2$ .

Тогда из (21) получим  $B^{\{a_i\}} = \pm \frac{i}{2 \det L^{\{a_i\}}} \sqrt{C^{\{a_i\}}}$ , и решение системы (3) запишется так:

$$\begin{aligned} (k_{a_i}^\pm)^\mu &= -\frac{1}{2} (L^{\{a_i\}})^{-1}_{a_i a_k} P_{a_k a_1}^2 p_{a_i a_1}^\mu \pm \\ &\pm \frac{i}{2 \det L^{\{a_i\}}} \sqrt{C^{\{a_i\}}} (p_{a_i a_1} \otimes \dots \otimes p_{a_n a_1})^\mu. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда и следует формула (4) для пропагаторов древовидных сомножителей. Величина  $C^{\{a_i\}}$  в (4) не зависит от  $l$ . Она является полиномом по внешним импульсам. Хотя оба древовидных слагаемых в фигурных скобках в (2) содержит  $\sqrt{C^{\{a_i\}}}$ , их сумма является четной функцией  $\sqrt{C^{\{a_i\}}}$  и корневой особенности не содержит.

Таким образом, при выполнении условий  $A$  система (3) имеет два решения (24), причем  $k_{a_i}^+ = (k_{a_i}^-)^*$ ,  $k_{a_i}^+ \neq k_{a_i}^-$ . Последнее вытекает из того, что  $L^{\{a_i\}}$  — положительно-определенная матрица и поэтому

$$C^{\{a_i\}} \geq 4m_{a_1}^2 \det L^{\{a_i\}}, \quad (25)$$

так что  $B^{\{a_i\}} \neq 0$ .

Покажем теперь, что при наложении описанных в п. 1 условий  $A$  на внешние импульсы невозможно существование «совместного полюса» у  $(n+1)$  пропагаторов в  $n$ -мерном пространстве-времени. Предположим, что наряду с уравнениями 3) выполнено еще условие ( $b \neq a_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ):  $k_b^2 + m_b^2 = (k_{a_i} + p_{b a_i})^2 + m_b^2 = 0$ . Вычитая отсюда урав-

нение (21), получим систему  $n$  линейных уравнений для величин  $A_{a_i}$ ,  $B^{(a_i)}$  из (23):

$$2(p_{a_i a_1}, k_{a_i}) + P_{a_1 a_i}^2 = 0, \quad 2(p_{b a_i}, k_{a_i}) P_{a_1 b}^2 = 0.$$

Из условий на внешние импульсы следует, что эта система имеет единственное решение, причем с вещественным  $B^{(a_i)}$ , в то время как исходная система (21), (22) имела решение лишь для чисто мнимого  $B^{(a_i)}$ . Это противоречие и доказывает требуемое.

Авторы выражают искреннюю признательность Л. Д. Фаддееву за интерес к работе и многочисленные обсуждения.

## Summary

A method of calculation of one-loop diagrams by taking successively the residues of the integrand with respect to each component of the internal momentum is suggested. The method is valid for an arbitrary space-time dimension leading to a simple proof of the reduction formula.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Källén G., Toll J. S. Special class of Feynman integrals in two-dimensional space-time. — J. Math. Phys., 1965, vol. 6, p. 299—303.
2. Арефьева И. Я., Корепин В. Е. Рассеяние в двумерной модели с лагранжианом  $L = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} (d_\mu u)^2 + m^2(\cos u - 1) \right]$ . — Письма в Журн. exper. и теор. физ., 1974, т. 20, с. 680—683.
3. Замолодчиков А. Б. Точная двухчастичная  $S$ -матрица квантовых солитонов модели Sine-Gordon. — Письма в Журн. exper. и теор. физ., 1977, т. 25, с. 499—501.
4. Melrose D. B. Reduction of Feynman diagrams. — Nuovo Cimento, 1965, vol. 40A, p. 181—213.
5. Peterson B. Reduction of a one-loop Feynman diagrams with  $n$  vertices in  $m$  dimensional space. — J. Math. Phys., 1965, vol. 6, p. 1955—1959.
6. Cutkosky R. E. Anomalous thresholds. — Rev. Mod. Phys., 1961, vol. 33, p. 448—455.